確かな位置

大阪大学
理学研究科 理学部

Q

整数でない平方根というのは有理数でないことは証明できると思います。
また、現代数学では無理数を有理数の極限として数を定義しているとも聞きました。
これを踏まえて私なりに考えたところ、例えば√２が、実数直線上では、（有理数の極限として定義されている以上）確かな位置として書き表すことは出来ないと思うのです。
しかし、幾何学的には三平方の定理などによって√２の存在や長さが確かにあると簡単に納得することも出来ます。
これに何か矛盾を感じてしまいます。
√２のような整数でない平方根をどのように捉えればよいですか？

A

（1）ある長さの線分が与えられたときに、定規とコンパスを使ってその sqrt(2) 倍の長さの線分を作図するのは容易です。
従って sqrt(2) という数は「定規とコンパスを使って」定義することが出来ます。

ある数の「確かな位置」というのはどういうことかということを考えてみましょう。
すると、結局のところ問題なのは「何によって」確かなのかということになります。有理数は整数の割算として定義することが出来ます。同じように整数の平方根は例えば定規とコンパスによる作図によって定義できます。
整数の割算を納得している人にとっては有理数の存在は安心して信じることができるでしょう。
同じように初等幾何の作図を当然のことと思っている人には、整数の平方根は確かに存在しています。
しかし例えば四則演算すらも十分に理解していない人は、10の100 乗のような巨大な数が確かに存在していると信じることはできないのではないでしょうか。

つまり、ある数の実在性はどのような操作を使うことにするのかということに依存します。
整数から出発して四則演算しか使ってはいけないのであれば sqrt(2) は存在しないことになります。

（2）「現代数学では無理数を有理数の極限として数を定義していると…」の部分についてですが、若干誤解しているようです。
sqrt(2) を定義しろと言われれば
「x*x=2 をみたす正の数 x を sqrt(2)と定義する」

と言うのが一番普通でしょう。ここには何も極限は入ってきません。
整数 p,q があるときに、有理数 p/q の定義が
「p=qx をみたす x を p/q と定義する」

であるのと同じようなものです。普通、極限を使って定義するのは、個別の数ではなくて「実数の全体」です。（個別の数で、極限によって定義するものもあります。）
このあたりの実数全体の構成については、微分積分の教科書で数学的に厳密なものの実数論の部分か、あるいはデデキント「数について」岩波文庫を見て下さい。