真剣にとらないやり方

Q

古典物理学に,剛体の回転を表現するオイラーの方程式があります。
この解は、剛体ボディ固定座標系の角速度の関数として、ヤコビの楕円関数を用いて表現されます。
自分で恒等変換で解いてみると（正確には後述の文献の解法を辿ると）、

（角速度の微分）＾２＝（角速度）＾２の関数　（１）
という途中過程に辿り付きます。

勿論、参考文献のように（１）の両辺の平方根を取り
（角速度の微分）＝＋（角速度）の関数　（２）

とすれば、ヤコビの楕円関数として解けます。しかし、（２）では符号の＋を既知としなくてはならず、また符号切り替えは一般には恒等変換にならないと思います。そしてこの疑問は以下へ続きます。

（２）の解のヤコビの楕円関数のうち、母数が１の場合はオイラーの方程式の特異解であり、separatrix（セパラトリクス）と呼ばれています。
一般解が周期解であるのに対してseparatrixは収束解です。
物理現象で言うと、一般解はニューテーション運動なのに対し、separatrixはシングルスピンです。
しかし一般解もそうなのですが、（２）で恒等変換を行っていないので本当のseparatrixは振動解なのではないかと考えています。
これは（１）が何やら円錐曲線めいた微分方程式であること（実際には違うが）も疑問の一因です。
また（これは線形微分方程式のみ？）一般解＋特異解がseparatrixの真の解なのではないかというのも疑問の一因です（この場合はやはり振動解？）。

以上自分では難しくて解けないのですが、趣旨としてはseparatrixは振動解なのではないか？ということです。
計算機でオイラーの方程式解の微分方程式を解いて確認しようとしましたが、double精度で行っても解は振動してしまいますがこれが有限語調誤差によるものなのか,理論誤差によるものなのかが判別がつきませんでした。

A

ちょっと答えにくい質問なので、分かりやすくするために結論を先に書きます。
(a) separatrix の上の点から出発する解は separatrix の終端する不動点に収束する解です。
separatrix の上にのっている解と振動解を繋いで解をつくるようなことは不可能です。

(b) 通常の数値計算によって separatrix の解を出そうとすると、振動する解がでて来てしまうのは自然なことです。

これは誤差のある計算をすれば当然そうなります。

（a）について

少し一般の場合で説明します。以下 x は N 次元空間の点と思って下さい。

常微分方程式 x'=f(x) に不変量 E(x) があるときに、関係 E(x)=const を使って変数を減らす操作をするときにはいつでもこのような問題が生じえます。

これはつまり、超曲面 E(x) が複数の成分からなっているためにおこります。

このような場合考える解がどの成分にのっているかを気をつけなくてはなりません。

この点についての巷の解説書の記述は確かに適切とは言えないものが多いのです。適切な解説書を挙げられないのが残念です。

さて平方根の符合の選び方ですが、私が一番論理的単純な納得のしかたと思うのは、このような計算全てを単に解を見つけるための発見法だとみなし、真剣にとらないやり方です。取り敢えず解を探して、その解がどうなっているかは解の一意性定理を使った議論に任せるというやり方です。

これだけではなんなので、質問の方程式の separatrix の上の解についての説明を試みます。

今の場合、状態の空間を

1. 不動点と separatrix たちでなる部分

2. これら以外の部分（振動解によって満たされている）

の二個に分けることができます。それぞれはことなる保存量を持つのでそれぞれの中の点から出発する解は時間が進んで別の部分にうつることはできません。さらに 1. を不動点と separatrix に分けると、これらの間もうつりあうことは出来ません（この部分は常微分方程式の解の一意性を使った議論が必要です。ここをちゃんと書いていない本が多い）。

不動点を取り除いてしまえばseparatrix 同士は連結ではありませんから連続な解は互いにうつりあうことができません。

separatrix の終端近くでは、解は時間とともに終端にある不動点に近付くことしかできません。

従って、ある separatrix の上の点から出発する解を考えるときには別の separatrix を考える必要がないので、その separatrix がのっている方の平方根の符合を選んで変えないことが正当化されます。

周期解の場合はどうしても平方根の符合を両方考える必要があるのでもっと説明が面倒になりますが、考え方は同じです。(図を描かずに説明するのが難しいのですが例えば上で挙げた戸田の本には図が描いてありますので見て下さい。)

（b）について

平面の上に絵を書いて、方程式を短い時間解いては少し誤差を入れるという操作を繰り返すとどうなるかを想像すれば、なぜ振動してしまうか分かると思います。

これの原因は separatix が終端している不動点が不安定な不動点であるためで、不安定な不動点の近くでは数値計算によってでてきた解の定性的な挙動は信用できません。