



数学科を志望している高校2年の学生です。

高校の数学授業内容とは全く関係ありませんが、個人的に EulerGamma 定数を調べています。

定義式 $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \}$ で表される以外に無限級数を用いた表現方法等、知られていましたら教えてください。

具体的には、私が独自に導出した式

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \sum_{k=2}^{\infty} \{ (-1)^k \frac{1}{(knk)} \} \}$$

という式が既に知られているかどうかを教えてください。



ご質問にあった公式は、たとえば <http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html> の(14)式にあります。

ちなみに、この「MathWorld」のサイトはオンライン数学辞典として便利なものです。

EulerGamma 定数に収束する級数は数値計算に便利なものはありません。

最近の本には、あまり説明されていないようです。ご質問にあった公式を改良した公式として

$$C_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n + \frac{1}{2})$$

について

$$\gamma = C_n - 2 \sum_{p:n+1 \rightarrow \infty} \sum_{k:1 \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+1)^{2p+1}}$$

という公式が数値計算に使われていたようです。この公式を導くヒントを示しておきます：

$$\gamma = C_n - (C_n - C_{n+1}) - (C_{n+1} - C_{n+2}) - \dots$$

また、EulerGamma 定数の積分表示式が、「数学公式III」(岩波全書)13ページにいくつか紹介されています。

被積分関数を適当に級数展開することにより、さまざまな形の級数表示を得ることができるでしょう。

ガンマ関数の入門書として、現在発売されている本：

- ・「ガンマ関数入門」(日本評論社)
- ・E.アルティン／著、上野健爾／訳・解説

数値解析に詳しい本(入手困難と思います)：

- ・「ガンマ関数の理論と応用」柴垣和三雄, 岩波書店(1952)